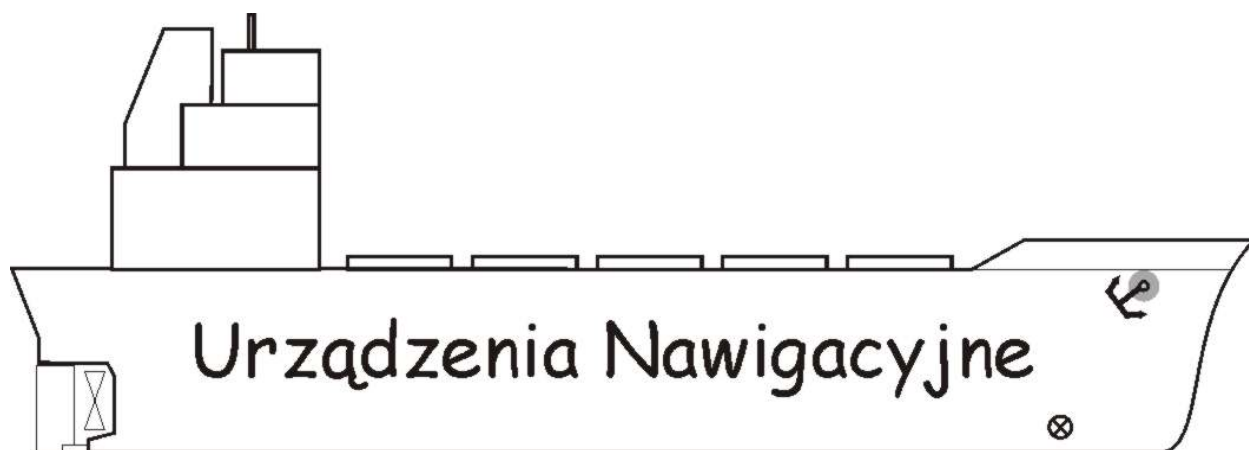


AKADEMIA MORSKA W SZCZECINIE

**Instytut Inżynierii Ruchu Morskiego
Zakład Urządzeń Nawigacyjnych**

Instrukcja nr 0

**Wzory do obliczeń statystycznych w ćwiczeniach
z radionawigacji**



Szczecin 2006

Temat: Wzory do obliczeń statystycznych w ćwiczeniach nr 6-12 z radionawigacji.

1. Wyznaczenie błędu średniego pozycji przy danych współrzędnych geograficznych ϕ i λ .

Aby na podstawie otrzymanych wyników pomiarów $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ oraz $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ obliczyć średnie kwadratowe błędy pomiarów należy postępować według następującego schematu obliczeń (przy założeniu pomiarów z odbiornika stacjonarnego – pozycja anteny nie zmienia się w czasie):

1. *Średnia arytmetyczna pomiarów (dla n liczby pomiarów):*

$$\text{- szerokości geograficznej: } \varphi_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i}{n} \text{ [°] lub [']}, \quad (1.1)$$

$$\text{- długości geograficznej: } \lambda_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n} \text{ [°] lub [']}. \quad (1.2)$$

2. *Odchylenia pomiarów od średniej:*

Dla wartości pomiaru i średniej arytmetycznej podanych w minutach [']:

$$\text{- szerokości geograficznej: } \Delta\varphi_i = (\varphi_i - \varphi_{sr}) \text{ ['] lub [Mm]}, \quad (1.3)$$

$$\text{- długości geograficznej: } a_i = (\lambda_i - \lambda_{sr}) \cdot \cos \varphi_{sr} \text{ ['] lub [Mm]}. \quad (1.4)$$

3. *Suma kwadratów odchyleń (odchylenie kwadratowe pomiarów):*

$$\text{- szerokości geograficznej: } \sum_{i=1}^n (\Delta\varphi_i)^2 \text{ [Mm}^2\text{]}, \quad (1.5)$$

$$\text{- zboczenia nawigacyjnego: } \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \text{ [Mm}^2\text{]}. \quad (1.6)$$

4. *Średni błąd kwadratowy (odchylenie standardowe pomiarów):*

Wyznaczany z prawdopodobieństwem (lub na poziomie ufności) 0,683 wynosi dla:

$$\text{- szerokości geograficznej: } m_\varphi = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta\varphi_i)^2}{n-1}} \text{ [Mm]}, \quad (1.7)$$

$$\text{- zboczenia nawigacyjnego: } m_a = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}{n-1}} \text{ [Mm]}. \quad (1.8)$$

Co oznacza, że dla danego parametru prawdopodobieństwo pojawienia się błędu w granicach np. od $-m_\varphi$ do m_φ wynosi 0,683.

Odpowiednio prawdopodobieństwo pojawienia się błędu w granicach podanych poniżej wynosi:

- $2m$ do $2m$... 0,955

- $3m$ do $3m$... 0,997 (tzw. błąd maksymalny określający graniczną wartość błędów przypadkowych)

5. Średni błąd średniej arytmetycznej:

- szerokości geograficznej: $m'_\varphi = \pm \frac{m_\varphi}{\sqrt{n}}$ [Mm], (1.9)

- zboczenia nawigacyjnego: $m'_a = \pm \frac{m_a}{\sqrt{n}}$ [Mm]. (1.10)

Na podstawie wyliczonych średnich błędów kwadratowych pomiarów φ i λ można wyznaczyć **błąd kołowy** zwany **błędem średnim pozycji statku (laboratorium)**:

$$M_0 = \sqrt{m_\varphi^2 + m_a^2} \text{ [Mm]} \quad (1.11)$$

Prawdopodobieństwo znalezienia się rzeczywistej pozycji wewnątrz błędu kołowego (jego poziom ufności) jest zmienne w granicach od 0,632 do 0,683, średnio przyjmowane jako 0,66.

2. Wyznaczenie błędu średniego pozycji przy danych współrzędnych hiperbolicznych.

Gdy korzystamy ze współrzędnych hiperbolicznych tzn. odczytujemy numery linii pozycyjnych (system DECCA oraz LORAN-C) w celu obliczenia *średnich kwadratowych błędów pomiarów* należy posługiwać się zależnościami (2.1) do (2.5):

$$l_{1sr} = \frac{\sum_{i=1}^n l_{1i}}{n}, \quad l_{2sr} = \frac{\sum_{i=1}^n l_{2i}}{n} \quad (2.1)$$

$$\sigma_1 = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_{1i} - l_{1sr})^2}{n-1}} \quad (2.2)$$

$$\sigma_2 = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_{2i} - l_{2sr})^2}{n-1}} \quad (2.3)$$

Przy czym dla Loran-C otrzymane wartości będą w μs , dla Decca w bezwymiarowych jednostkach różnicy faz. Odpowiednio średnie kwadratowe błędy pomiarów w Mm otrzymamy poprzez odczyt szerokości pasów (w_i) obu siatek hiperbolicznych z ramki mapy w Mm dla miejsca (szerokości geograficznej) obserwacji dla Decca oraz poprzez przeliczenie ilości Mm przypadającej na 1 μs dla Loran-C:

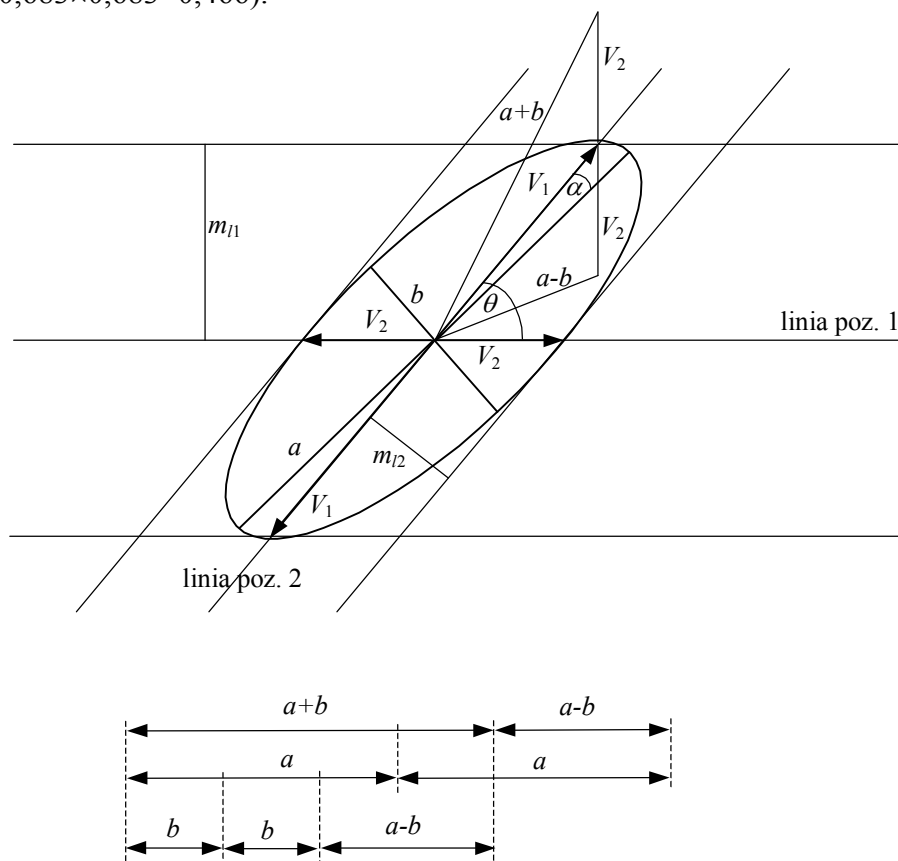
- dla Decca: $m_{11} = \sigma_1 \cdot w_{11}$ [Mm], $m_{12} = \sigma_2 \cdot w_{12}$ [Mm] (2.4)

- dla Loran-C: $m_{11} = \sigma_1 \cdot w_{1\mu s}$ [Mm], $m_{12} = \sigma_2 \cdot w_{2\mu s}$ [Mm] (2.5)

Średnie błędy wektorowe linii pozycyjnych możemy wyznaczyć znając kąt θ , pod jakim się te linie przecinają:

$$V_1 = \frac{m_{l1}}{\sin \theta} \text{ [Mm]}, \quad V_2 = \frac{m_{l2}}{\sin \theta} \text{ [Mm]} \quad (2.6)$$

Błędy te skierowane są wzdłuż linii pozycyjnych: V_1 wzdłuż drugiej linii pozycyjnej, V_2 wzdłuż pierwszej linii pozycyjnej tworząc **równoległobok błędów** (prawdopodobieństwo znajdowania się pozycji wewnątrz średniego równoległoboku błędów wynosi $0,683 \times 0,683 = 0,466$).



Rys. 2.1. Geometryczne wyznaczanie średniego równoległoboku i średniej elipsy błędów.

Półosie **średniej elipsy błędów** wynoszą:

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{V_1^2 + 2V_1V_2 \sin \theta + V_2^2} + \sqrt{V_1^2 - 2V_1V_2 \sin \theta + V_2^2} \right) [\text{Mm}] \quad (2.7)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{V_1^2 + 2V_1V_2 \sin \theta + V_2^2} - \sqrt{V_1^2 - 2V_1V_2 \sin \theta + V_2^2} \right) [\text{Mm}] \quad (2.8)$$

Kąt α , zawarty między półosią a a większym błędem wektorowym oblicza się według wzoru:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\sin 2\theta}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 + \cos 2\theta} \quad (2.9)$$

Kąt α odkładamy od większego błędu wektorowego tak, aby półoś większa a znalazła się wewnątrz kąta θ utworzonego przez ramiona V_1 i V_2 .

Geometryczny sposób wyznaczenia średniego równoległoboku błędów i średniej elipsy błędów przedstawia rysunek 2.1. Dłuższą półoś elipsy a odkłada się na dwusiecznej kąta $\overline{a-b}$ i $\overline{a+b}$. Prostopadłe do niej odkłada się długość półosi małej b . Prawdopodobieństwo znalezienia się pozycji statku (laboratorium) wewnątrz średniej elipsy błędów jest mniejsze niż średniego równoległoboku błędów i wynosi 0,393.

Błąd średni pozycji określa się na podstawie zależności:

$$M_0 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{m_{n1}^2 + m_{n2}^2} [\text{Mm}] \quad (2.10)$$

3. Wyznaczenie mediany oraz modalnej zmiennej losowej i współczynnika korelacji dwóch zmiennych losowych.

Mediana i modalna zaliczają się do pozycyjnych miar położenia badanej zbiorowości statystycznej.

Przy przeliczalnej zbiorowości statystycznej (dla zmiennej losowej dyskretnej) **mediana Me (kwartył drugi)** dzieli zbiorowość na dwie równe części; połowa jednostek (pomiarów) ma wartości cechy mniejsze lub równe medianie, a połowa wartości cechy równe lub większe od Me . Stąd też mediana bywa nazywana **wartością środkową**.

W szeregach szczegółowych, uporządkowanych rosnąco, medianę wyznacza się z wzoru:

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right), & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases} \quad (3.1)$$

Pozycję mediany ustala się na poziomie połowy liczebności uporządkowanej rosnąco próby:

$$N_{Me} = \frac{n}{2} \quad (3.2)$$

Modalna D (dominanta, moda, wartość najczęstsza) jest to wartość cechy statystycznej, która w danym rozkładzie empirycznym występuje najczęściej. Analitycznie dla przeliczalnej zbiorowości statystycznej (przeliczalnej liczbie pomiarów) modalną wyznacza się z wzoru:

$$D = x_{0d} + \frac{n_d - n_{d-1}}{(n_d - n_{d-1}) + (n_d - n_{d+1})} \cdot (x_{Gd} - x_{0d}) \quad (3.3)$$

gdzie: d - numer przedziału (klasy), w którym występuje modalna,
 x_{0d} - dolna granica przedziału, w którym występuje modalna,
 x_{Gd} - górna granica przedziału, w którym występuje modalna,
 n_d - liczebność przedziału modalnej, tzn. klasy o numerze d ,
 $n_{d-1}; n_{d+1}$ - liczebności klas: poprzedzającej przedział modalnej i następującej po tym przedziale.

Współczynnik korelacji dwóch zmiennych losowych x i y (Pearsona) jest miarą siły związku liniowego między cechami. Oblicza się go według zależności:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{\bar{s}r})(y_i - y_{\bar{s}r})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{\bar{s}r})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - y_{\bar{s}r})^2}} \quad (3.4)$$

Literatura.

- [1] Górski S.: „*Ocena dokładności w nawigacji morskiej*”; Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1977.
- [2] Jóźwiak J., Podgórski J.: „*Statystyka od podstaw*”; Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1997.
- [3] Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U.: „*Statystyka, elementy teorii i zadania*”, WAE im. Oskara Langego, Wrocław 1998.